



# Capítulo IV

## Interpolação

**Dr. André Mendes Cavalcante**

Novembro de 2014



# TÓPICOS

- Introdução
- Interpolação de Lagrange

# Introdução

# Interpolação

- Algumas funções são conhecidas apenas em um intervalo finito  $[a,b]$ , e são representadas por uma tabela, não se dispondo de sua forma analítica

Tabela 1

$i$	$x_i$	$y_i$
0	$x_0$	$y_0$
1	$x_1$	$y_1$
2	$x_2$	$y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$x_n$	$y_n$

# Introdução

## Interpolação

- O dados da tabela devem levar à construção de uma função aproximada
- Muitas vezes funções apresentam formas analíticas complexas, podendo ser aproximadas por outras funções mais simples, como:
  - Logarítmica
  - Trigonométrica
  - Polinomial

Este curso apresentará apenas as funções polinomiais

# Conceitos

# Interpolação

- Seja  $y = f(x)$  representada na Tabela 1. Determinar  $f(x)$  sendo:
  - a)  $\bar{x} \in (x_0, x_n)$  e  $\bar{x} \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$
  - b)  $\bar{x} \notin (x_0, x_n)$

Para resolver **a)**, deve ser feita uma interpolação:

- Determinar o polinômio interpolador, que é uma aproximação da função tabelada

Para resolver **b)**, deve ser feita uma extrapolação:

- Não é objeto deste curso

# Conceitos

## Interpolação

- Exemplo:  
Um censo foi realizado sendo coletados os seguintes dados para uma dada cidade:

Ano	1960	1970	1980	1990	2000
População	600.000	750.000	980.430	1.340.220	1.830.410

População para 1975 →

Técnica de Interpolação

População para 2010 →

Técnica de Extrapolação

# Interpolação de Lagrange

- **Polinômio interpolador:**

Sendo dados  $(n+1)$  pontos, será encontrado o polinômio interpolador de ordem  $n$ .

**Teorema:**

Seja  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  ( $n+1$  pontos),  $x_i \neq x_j$ , para  $i \neq j$ . Existe um único polinômio  $P(x)$  de grau não maior que  $n$ , tal que  $P(x_i) = y_i$ , para todo  $i$ .

Logo,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

# Interpolação de Lagrange

- Para os pontos  $(x_i, y_i)$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}P_n(x_0) &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\P_n(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\&\vdots \\P_n(x_n) &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n\end{aligned}$$

- Na forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$



# Interpolação de Lagrange

- Na forma Vetorial:

$$\mathbf{X}\bar{a} = \bar{y}$$

Onde:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \quad \bar{y} = [y_0 \quad y_1 \quad \cdots \quad y_n]^T$$

$$\bar{a} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_n]^T$$

$$\text{Det}(\mathbf{X}) = \prod_{\substack{j=0 \\ i>j}}^n (x_i - x_j)$$

Como,  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$   $\rightarrow$   $\text{Det}(\mathbf{X}) \neq 0$

Logo,  $P_n(x)$  existe e é único.

# Interpolação de Lagrange

- **Polinômios de Lagrange:**

Sejam os  $n + 1$  polinômios  $p_i(x)$  de grau  $n$ :

$$p_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$p_1(x) = (x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$\vdots$$

$$p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Na forma sintética:  $p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$   $i = 0, 1, 2, \dots, n$

# Interpolação de Lagrange

- **Polinômios de Lagrange (continuação):**

Tais polinômios possuem as seguintes propriedades:


$$a) p_i(x_j) \neq 0 \quad \forall j = i$$

$$b) p_i(x_j) = 0 \quad \forall j \neq i$$

Tais polinômios são conhecidos como **Polinômios de Lagrange**

Como o polinômio interpolador  $P_n(x)$  que se deseja encontrar é de ordem  $n$  e contém os pontos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , pode-se escrevê-lo como uma combinação linear dos polinômios de Lagrange.

Logo, 
$$P_n(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \dots + b_n p_n(x)$$



$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i p_i(x)$$

# Interpolação de Lagrange

- **Polinômios de Lagrange (continuação):**
  - Cálculo dos coeficientes  $b_i$ 's:

Para o ponto  $x$  índice  $i$  ( $x_i$ ), tem-se:

$$P_n(x_i) = b_0 p_0(x_i) + b_1 p_1(x_i) + \cdots + b_i p_i(x_i) + \cdots + b_n p_n(x_i)$$

Considerando as propriedades dos polinômios de Lagrange, tem-se:

$$P_n(x_i) = b_i p_i(x_i)$$



$$b_i = \frac{P_n(x_i)}{p_i(x_i)}$$

Como  $P_n(x_i) = y_i$



$$b_i = \frac{y_i}{p_i(x_i)}$$

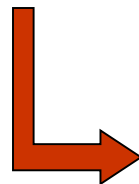
# Interpolação de Lagrange

- Polinômios de Lagrange (continuação):

Como  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i p_i(x)$  e  $b_i = \frac{y_i}{p_i(x_i)}$

Tem-se  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{p_i(x_i)} p_i(x)$  ou  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)}$

Como  $p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$



$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

**Equação do Polinômio Interpolador de Lagrange**

# Interpolação de Lagrange

## Interpolação

- **Exemplo:**

Determinar:

- (a) O polinômio interpolador de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo;
- (b)  $P(0,3)$ .

$i$	$x_i$	$y_i$
0	0,0	0,000
1	0,2	2,008
2	0,4	4,064
3	0,5	5,125

# Interpolação de Lagrange

- Exemplo:

Solução

(a) Polinômio Interpolador:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^3 y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

# Interpolação de Lagrange

## Interpolação

- Exemplo (continuação):

$$P_3(x) = \frac{2,008}{0,012} (x^3 - 0,9x^2 + 0,2x) + \frac{4,064}{(-0,008)} (x^3 - 0,7x^2 + 0,1x) + \frac{5,125}{0,015} (x^3 - 0,6x^2 + 0,08x)$$

Resultando em:  $P_3(x) = x^3 + 10x$

(b)  $P(0,3)$ :

Tem-se  $P_3(0,3) = (0,3)^3 + 10(0,3) \rightarrow P_3(0,3) = 3,027$



# Interpolação de Lagrange

## Interpolação

- Erro de Truncagem (Interpolação de Lagrange):

$$E_T(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) \quad \text{com} \quad \bar{x} \in (x_0, x_n)$$

ou

$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0) \cdot (\bar{x} - x_1) \cdot \dots \cdot (\bar{x} - x_n) \cdot A$$

Constante a ser determinada, a qual depende da função a ser analisada.

# Interpolação de Lagrange

## Interpolação

- **Erro de Truncagem (Interpolação de Lagrange):**

Pode-se demonstrar através do Teorema de Rolle, que:

$$A = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!} \quad \text{onde} \quad \varepsilon \in (x_0, x_n)$$

Logo:

**Interpolação de Lagrange**

$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0) \cdot (\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n) \cdot \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

# Interpolação de Lagrange

# Interpolação

- Exemplo:

A função  $y = f(x)$  passa pelos pontos registrados na tabela abaixo. Determine:

- (a) O valor aproximado de  $f(0,32)$  usando o polinômio interpolador de 2º grau, ou seja, calcular  $P_2(0,32)$ ;
- (b) Calcular o erro para  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ .

$x$	0,000	0,100	0,300	0,400
$y$	1,000	0,761	0,067	-0,376

# Interpolação de Lagrange

## Interpolação

- Exemplo:

### Solução

Usando-se os três últimos valores tabelados para a montagem do polinômio, tem-se

$$x_0 = 0,100$$

$$x_1 = 0,300$$

$$x_2 = 0,400$$



$$y_0 = +0,761$$

$$y_1 = +0,067$$

$$y_2 = -0,376$$

# Interpolação de Lagrange

## Interpolação

- Exemplo:

Solução

(a) Polinômio Interpolador:

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

# Interpolação de Lagrange

- Exemplo (continuação):

$$P_2(x) = +0,761 \frac{(x-0,3)(x-0,4)}{(0,1-0,3)(0,1-0,4)} + 0,067 \frac{(x-0,1)(x-0,4)}{(0,3-0,1)(0,3-0,4)} - 0,376 \frac{(x-0,1)(x-0,3)}{(0,4-0,1)(0,4-0,3)}$$

Resultando em:

$$P_2(x) = 1,012 - 2,19x - 3,2x^2$$

Logo:  $P_2(x) = 1,012 - 2,19(0,32) - 3,2(0,32)^2$



$$P_2(0,32) = -0,01648$$

# Interpolação de Lagrange

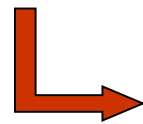
Interpolação

- Exemplo (continuação):

(b) Erro de Truncagem:  $E_T(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$

Logo:

$$E_T(0,32) = f(0,32) - P_2(0,32) = (-0,016832) - (-0,01648)$$

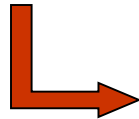


$$E_T(0,32) = -3,52 \cdot 10^{-4}$$

# Interpolação de Lagrange

- Exemplo (continuação):

ou: 
$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0) \cdot (\bar{x} - x_1) \cdot \dots \cdot (\bar{x} - x_n) \cdot \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

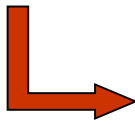


$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0) \cdot (\bar{x} - x_1) \cdot (\bar{x} - x_2) \cdot \frac{f'''(\varepsilon)}{3!}$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 - 2x + 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - 8x - 2 \\ f''(x) &= 6x - 8 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

$$E_T(0,32) = (0,32 - 0,1) \cdot (0,32 - 0,1) \cdot (0,321 - 0,4) \cdot \frac{6}{6}$$



$$E_T(0,32) = -3,52 \cdot 10^{-4}$$