S. LINEARES

Capítulo III
Sistemas Lineares

Dr. André Mendes Cavalcante

Novembro de 2014

andre.Cavalcante@indt.org.br

S. LINEARES

TÓPICOS

- Introdução
- Métodos Diretos
  - Regra de Cramer
  - Técnica da Inversão de Matrizes
  - Eliminação de Gauss
  - Método de Pivotação
- Métodos Iterativos
  - Método de Gauss-Seidel

andre.Cavalcante@indt.org.br

S. LINEARES

Introdução

- **Um problema de grande interesse prático de estruturas e redes elétricas e solução de equações diferenciais, é o da resolução numérica de um sistema linear de *n* equações e *n* incógnitas:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- Se $b_1, b_2, \ldots, b_n = 0$ → **Sistema Homogêneo**

- Caso contrário → **Sistema Não-Homogêneo**

S. LINEARES

Introdução

- **Sistema na Forma Vetorial:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

$A =$ matriz dos coeficientes

$\bar{x} =$ vetor incógnita

$\bar{b} =$ termos independentes

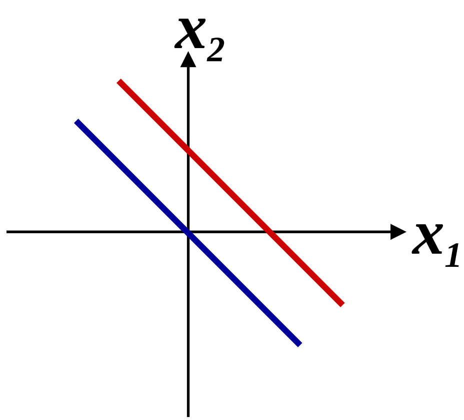
- **Classificação quanto ao número de soluções:**

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Compatível} \begin{cases} \text{-Sistema Determinado (uma solução)} \\ \text{- Sistema Indeterminado (mais de uma solução)} \end{cases} \\ \text{Incompatível (não apresenta solução)} \end{cases}$$

Introdução

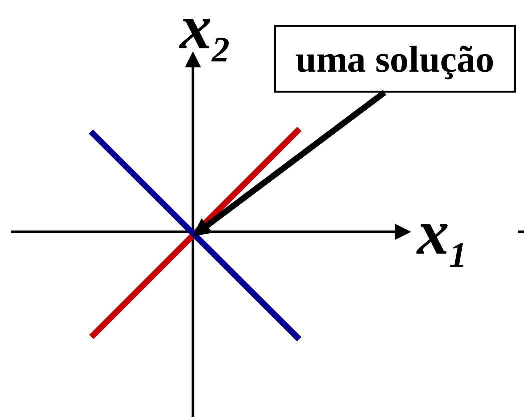
- Classificação quanto ao número de soluções:

Sistema Incompatível



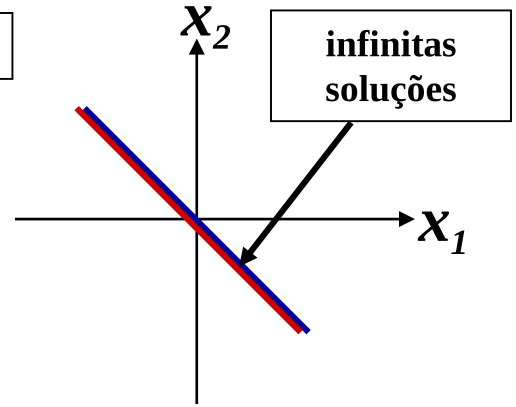
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Sistema Determinado



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Sistema Indeterminado



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

andre.Cavalcante@indt.org.br

S. LINEARES

Introdução

- **Métodos de Resolução:**

  Métodos Diretos

  Métodos Iterativos

Métodos Diretos: São métodos que produzem a solução exata do sistema linear (a menos de erros de arredondamento) depois de um nº finito de operações.

Métodos Iterativos: São métodos nos quais a solução do sistema linear é obtida como limite de uma seqüência de aproximações sucessivas, sendo dada um aproximação inicial ("chute inicial").

Métodos Diretos

S. LINEARES

- **Regra de Cramer:**

Seja o sistema 2x2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Multiplicando-se a 1ª Equação por a_{22} e multiplicando-se a 2ª Equação por $-a_{12}$, resulta:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x_1 - a_{22}a_{12}x_2 = -b_2a_{12} \end{cases} +$$

$$x_1\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right) = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Regra de Cramer:**

Isolando-se x_1:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_1}{\Delta_{\text{principal}}}$$

Analogamente:

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_2}{\Delta_{\text{principal}}}$$

Métodos Diretos

- **Regra de Cramer:**

Caso Geral (Sistema *n* x *n*):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_n}{\Delta_{\text{principal}}}$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Regra de Cramer (Exemplo):**

Achar a solução do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 1x_1 - 1x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta_{\text{principal}}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(-5-0)}{(-2-3)} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta_{\text{principal}}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(0-5)}{(-2-3)} = 1$$

$$\bar{x} = [1 \quad 1]^T$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Técnica da Inversão de Matrizes:**

Seja a Equação Vetorial: $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$

Multiplica-se pela inversa da matriz *A* (*A*$^{-1}$)

$A^{-1} \cdot A \cdot \bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$ ⇒ $I \cdot \bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$

Matriz Identidade: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Logo: $\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Técnica da Inversão de Matrizes (Exemplo):**

Achar a solução do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 3x_1 - 1x_2 = 0 \\ 1x_1 + 1x_2 = 4 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes e seu determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = (3.1) - (-1.1) = 4$$

Matriz Inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Métodos Diretos

- **Técnica da Inversão de Matrizes (Exemplo):**

(continuação):

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Eliminação de Gauss:**

Com (n-1) passos o sistema $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$ é transformado num sistema triangular equivalente $U \cdot \overline{x} = \overline{c}$ o qual se resolve facilmente por substituição:

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Matriz Aumentada ou Matriz Completa:

$$\widetilde{A} = \left[A \;\; \vdots \;\; \overline{b}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (L_1) - \text{Linha } 1 \\ \leftarrow (L_2) - \text{Linha } 2 \\ \leftarrow (L_3) - \text{Linha } 3 \end{matrix}$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Eliminação de Gauss:**

Elemento Pivô

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicador: $m_{21} = -\dfrac{a_{21}}{piv\hat{o}} = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} = -\dfrac{1}{3}$

Transformação Linear: $m_{21}L_1 + L_2 \Rightarrow L_2$

$$m_{21}L_1 = [-1 \quad -2/3 \quad -4/3 \quad \vdots \quad -1/3]$$
$$L_2 = [+1 \quad +1 \quad +2 \quad \vdots \quad +2] \; +$$

$$\text{Nova } L_2 = [\;0 \quad +1/3 \quad +2/3 \quad \vdots \quad +5/3]$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Eliminação de Gauss:**

Elemento Pivô

$$\text{Nova } \tilde{A} = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & \vdots & 5/3 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicador: $m_{31} = -\dfrac{a_{31}}{piv\hat{o}} = -\dfrac{a_{31}}{a_{11}} = -\dfrac{4}{3}$

Transformação Linear: $m_{31}L_1 + L_3 \Rightarrow L_3$

$$m_{31}L_1 = \begin{bmatrix} -4 & -8/3 & -16/3 & \vdots & -4/3 \end{bmatrix}$$
$$L_3 = \begin{bmatrix} +4 & +3 & -2 & \vdots & +3 \end{bmatrix} +$$

$$\text{Nova } L_3 = \begin{bmatrix} 0 & +1/3 & -22/3 & \vdots & +5/3 \end{bmatrix}$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Eliminação de Gauss:**

Elemento Pivô

$$\text{Nova } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{1/3} & 2/3 & \vdots & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & \vdots & 5/3 \end{bmatrix}$$

Multiplicador: $m_{32} = -\dfrac{a_{32}}{piv\hat{o}} = -\dfrac{a_{32}}{a_{22}} = -1$

Transformação Linear: $m_{32}L_2 + L_3 \Rightarrow L_3$

$$\begin{aligned} m_{32}L_2 &= [0 \quad -1/3 \quad -2/3 \quad \vdots \quad -5/3\,] \\ L_3 &= [0 \quad +1/3 \quad -22/3 \quad \vdots \quad +5/3\,] \; + \end{aligned}$$

$$\text{Nova } L_3 = [\; 0 \quad 0 \quad -8 \quad \vdots \quad 0]$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Eliminação de Gauss:**

$$\text{Nova } \tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

Sistema Equivalente:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ (1/3)x_2 + (2/3)x_3 = 5/3 \\ -8x_3 = 0 \end{cases}$$

$-8x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0$

$(1/3)x_2 + (2/3).0 = 5/3 \rightarrow x_2 = +5$

$3x_1 + 2.(5) + 4.(0) = -5/3 \rightarrow x_1 = -3$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}^T$$

andre.Cavalcante@indt.org.br

Métodos Diretos

- **Método de Pivotação:**

Usado para minimizar os problemas de erros de arredondamento na eliminação de Gauss

Pivotação $\begin{cases} \text{Estratégia de Pivoteamento Parcial} \\ \text{Estratégia de Pivoteamento Completo} \end{cases}$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Estratégia de Pivoteamento Parcial:**

Exemplo:

Pivô

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 0 & + & x_2 & + & 0 & + & 3x_4 & = & 6 \\ 0 & \boxed{-} & \boxed{3x_2} & - & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 7 \\ 0 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 0 & = & 15 \end{cases}$$

O pivô deverá ser o elemento de maior coeficiente em módulo da posição de pivoteamento. Então, neste exemplo, deve-se trocar a Linha 2 (L_2) pela Linha 3 (L_3), resultando:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 5 \\ 0 & \boxed{-3} & -5 & 7 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & \vdots & 15 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Pivô}$$

Obs: Só é realizada a troca de linhas (pivotação parcial)

Métodos Diretos

- **Estratégia de Pivoteamento Completo:**

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Matriz Aumentada ou Matriz Completa:

Onde C_n = Coluna n

$$\tilde{A} = [A \; \vdots \; \bar{b}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (L_1) - \text{Linha 1} \\ (L_2) - \text{Linha 2} \\ (L_3) - \text{Linha 3} \end{array}$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Estratégia de Pivoteamento Completo:**

Exemplo:

O pivô deverá ser o elemento de maior coeficiente em módulo dentre os elementos da linha pivoteamento pra baixo. Então, neste exemplo, deve-se trocar a Linha 1 (L_1) pela Linha 3 (L_3), ou alternativamente, pode-se trocar a Coluna 1 (C_1) pela Coluna 3 (C_3).

Solução: Trocando-se a L_1 pela L_3, resulta:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \boxed{4} & 3 & -2 & \vdots & 3 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Pivô}$$

Obs: Nesta estratégia pode ser realizada a troca de linhas (pivotação parcial) e colunas

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Estratégia de Pivoteamento Completo:**

Elemento Pivô

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc} \boxed{4} & 3 & -2 & \vdots & 3 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicador: $m_{21} = -\frac{a_{21}}{piv\hat{o}} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{1}{4}$

Transformação Linear: $m_{21}L_1 + L_2 \Rightarrow L_2$

$$m_{21}L_1 = [-1 \quad -3/4 \quad +1/2 \quad \vdots \quad -3/4]$$

$$L_2 = [+1 \quad +1 \quad +2 \quad \vdots \quad +2] +$$

Nova $L_2 = [\ 0 \quad +1/4 \quad +5/2 \quad \vdots \quad +5/4]$

Métodos Diretos

S. LINEARES

- **Estratégia de Pivoteamento Completo:**

Elemento Pivô

$$\text{Nova } \tilde{A} = \begin{bmatrix} \boxed{4} & 3 & -2 & \vdots & 3 \\ 0 & 1/4 & 5/2 & \vdots & 5/4 \\ 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicador: $m_{31} = -\dfrac{a_{31}}{piv\hat{o}} = -\dfrac{a_{31}}{a_{11}} = -\dfrac{3}{4}$

Transformação Linear: $m_{31}L_1 + L_3 \Rightarrow L_3$

$$m_{31}L_1 = [-3 \quad -9/4 \quad +3/2 \quad \vdots \quad -9/4]$$

$$L_3 = [+3 \quad +2 \quad +4 \quad \vdots \quad +1] \; +$$

$$\text{Nova } L_3 = [\;0 \quad -1/4 \quad +1/2 \quad \vdots \quad -5/4]$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Estratégia de Pivoteamento Completo:**

$$\text{Nova } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \\ 0 & +1/4 & 5/2 & \vdots & +5/4 \\ 0 & -1/4 & 11/2 & \vdots & -5/4 \end{bmatrix}$$

Escolhe-se o maior coeficiente (em módulo) entre os coeficientes da L_2 e L_3, para ser o novo pivô. Neste caso, deve-se trocar a C_2 com a C_3 e em seguida a L_3 com a L_2 (pivotação completa). A ordem desta seqüência é irrelevante.

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Estratégia de Pivoteamento Completo:**

Elemento Pivô

$$\text{Nova } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{11/2} & -1/4 & \vdots & -5/4 \\ 0 & 5/2 & +1/4 & \vdots & +5/4 \end{bmatrix}$$

Multiplicador: $m_{32} = -\dfrac{a_{32}}{piv\hat{o}} = -\dfrac{a_{32}}{a_{22}} = -\dfrac{5}{11}$

Transformação Linear: $m_{32}L_2 + L_3 \Rightarrow L_3$

$$m_{32}L_2 = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 & 5/44 & \vdots & 25/44 \end{bmatrix}$$
$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & +5/2 & +1/4 & \vdots & +5/4 \end{bmatrix} +$$

$$\text{Nova } L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4/11 & \vdots & 20/11 \end{bmatrix}$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Estratégia de Pivoteamento Completo:**

Obs: Quando se troca colunas, deve-se manter a ordem das variáveis

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_3 & x_2 & & \bar{b} \\ \text{Nova } \tilde{A} = & \left[\begin{array}{cccc} 4 & -2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 11/2 & -1/4 & \vdots & -5/4 \\ 0 & 0 & +4/11 & \vdots & 20/11 \end{array}\right] \end{array}$$

Sistema Equivalente:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_3 + 3x_2 = 3 \\ (11/2)x_3 - (1/4)x_2 = -5/4 \\ -(4/11)x_2 = -20/11 \end{cases}$$

Resultando em:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{x_2 = 5} \\ \boxed{x_3 = 0} \\ \boxed{x_1 = -3} \end{array}\right\} \boxed{\bar{x} = [-3 \quad 5 \quad 0]^T}$$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Resíduo:**

Usado para medir (avaliar) a precisão dos cálculos (soluções)

Seja a Equação Vetorial: $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$

$$\bar{r} = \bar{b} - A \cdot \bar{x} \neq 0$$

O resíduo é devido ao uso de casas decimais limitadas

Métodos Diretos

S. LINEARES

- **Resíduo (Exemplo):**

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 8,7x_1 + 3,0x_2 + 9,3x_3 + 11,0x_4 = 16,4 \\ 24,5x_1 - 8,8x_2 + 11,5x_3 - 45,1x_4 = -49,7 \\ 52,3x_1 - 84,0x_2 - 23,5x_3 + 11,4x_4 = -80,8 \\ 21,0x_1 - 81,0x_2 - 13,2x_3 + 21,5x_4 = -106,3 \end{cases}$$

Usando-se duas (02) casa decimais, o sistema triangular obtido após as transformações é:

$$\begin{cases} 8,7x_1 + 3,0x_2 + 9,3x_3 + 11,0x_4 = 16,4 \\ \quad - 17,268x_2 - 14,73x_3 - 76,12x_4 = -95,95 \\ \quad + 7,66x_3 + 395,16x_4 = 387,70 \\ \quad - 1662,97x_4 = -1663,81 \end{cases}$$

andre.Cavalcante@indt.org.br

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Resíduo (Exemplo):**

Cuja solução é: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0{,}97 & 1{,}98 & -0{,}97 & 1{,}00 \end{bmatrix}^T$

Calculando-se o resíduo $\bar{r} = \bar{b} - A \cdot \bar{x}$ para este caso, tem-se:

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} +16{,}4 \\ -49{,}7 \\ -80{,}8 \\ -106{,}3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8{,}7 & 3{,}0 & 9{,}3 & -11{,}0 \\ 24{,}5 & -8{,}8 & 11{,}5 & -45{,}1 \\ 52{,}3 & -84{,}0 & -23{,}5 & 11{,}4 \\ 21{,}0 & -81{,}0 & -13{,}2 & 21{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0{,}97 \\ +1{,}98 \\ -0{,}97 \\ +1{,}00 \end{bmatrix}$$

Resultando em: $\bar{r} = \begin{bmatrix} 0{,}042 & 0{,}214 & 0{,}594 & -0{,}594 \end{bmatrix}^T$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Refinamento de Soluções:**

Seja o sistema $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$, cuja solução inicial é $\bar{x}^{(0)}$, então a solução melhorada $\bar{x}^{(1)}$ pode ser obtida por:

$$\boxed{\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \bar{\delta}^{(0)}}$$

vetor de correção da solução $\bar{x}^{(0)}$

Substituindo a equação acima na equação vetorial $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ resulta:

$$A \cdot \bar{x}^{(1)} = \bar{b}$$
$$A \cdot \left(\bar{x}^{(0)} + \bar{\delta}^{(0)}\right) = \bar{b}$$
$$A \cdot \bar{x}^{(0)} + A \cdot \bar{\delta}^{(0)} = \bar{b}$$
$$A \cdot \bar{\delta}^{(0)} = \bar{b} - A \cdot \bar{x}^{(0)}$$

$$\underbrace{A \cdot \bar{\delta}^{(0)} = \bar{r}^{(0)}}$$

Sistema cuja solução $\bar{\delta}^{(0)}$ é o vetor de correção da solução $\bar{x}^{(0)}$

S. LINEARES

Métodos Diretos

- **Refinamento de Soluções:**

Rotina de Refinamento:

1º) $\bar{x}^{(0)}$

2º) $\bar{r}^{(0)} = \bar{b} - A \cdot \bar{x}^{(0)}$

3º) $A \cdot \bar{\delta}^{(0)} = \bar{r}^{(0)}$

4º) $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \bar{\delta}^{(0)}$

5º) $\left\{ \begin{array}{ll} 2^{o}) & \bar{r}^{(1)} = \bar{b} - A \cdot \bar{x}^{(1)} \\ 3^{o}) & A \cdot \bar{\delta}^{(1)} = \bar{r}^{(1)} \\ 4^{o}) & \bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} + \bar{\delta}^{(1)} \\ & \vdots \end{array} \right.$

até $\bar{r}^{(k)} \leq$ resíduo desejado (teoricamente igual a zero)

S. LINEARES

Métodos Iterativos

São métodos nos quais a solução do sistema linear é obtida como limite de uma seqüência $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}$ de aproximações sucessivas de $\bar{x}$, sendo dada um aproximação inicial $\bar{x}^{(0)}$ ("chute inicial").

Para utilizar um método iterativo, é necessário fazer a seguinte transformação:

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b} \xrightarrow{\text{Transformação}} \bar{x} = C \cdot \bar{x} + \bar{g}$$

$$\begin{cases} \bar{x}^{(1)} = C \cdot \bar{x}^{(0)} + \bar{g} \\ \bar{x}^{(2)} = C \cdot \bar{x}^{(1)} + \bar{g} \\ \bar{x}^{(3)} = C \cdot \bar{x}^{(2)} + \bar{g} \\ \vdots \\ \bar{x}^{(k+1)} = C \cdot \bar{x}^{(k)} + \bar{g} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow$$

Até que o erro ≤ precisão determinada ou k < nº máximo de iterações estipulada

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Critérios de Parada:**

- Erro absoluto:

$$\boxed{M^{(k+1)} = \text{Máx} \left| \bar{x}_i^{(k+1)} - \bar{x}_i^{(k)} \right|} \qquad 1 \leq i \leq n$$

- Erro Relativo:

$$\boxed{M_R^{(k+1)} = \frac{M^{(k+1)}}{\text{Máx} \left| \bar{x}_i^{(k+1)} \right|}} \qquad 1 \leq i \leq n$$

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Método de Gauss-Seidel (MGS):**

Seja o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Isolando-se x_1 na 1ª equação, x_2 na 2ª equação, e assim sucessivamente, tem-se:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)}\right)\right]$$

As variáveis são atualizadas com o valor atual nas iterações subseqüentes

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Método de Gauss-Seidel (MGS):**

Na forma matricial tem-se: $\boxed{\bar{x}^{(k+1)} = D + E \cdot \bar{x}^{(k+1)} + F \cdot \bar{x}^{(k)}}$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{22} & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} \right\}$$

Obs: $a_{ii} \neq 0 \ \ \forall i$, caso contrário, deve-se reagrupar as equações para que se consiga esta condição.

Colocando na forma iterativa $\bar{x}^{(k+1)} = C \cdot \bar{x}^{(k)} + \bar{g}$, tem-se:

$$\bar{x}^{(k+1)} = D + E \cdot \bar{x}^{(k+1)} + F \cdot \bar{x}^{(k)}$$

$$(I - E) \cdot \bar{x}^{(k+1)} = D + F \cdot \bar{x}^{(k)}$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = (I - E)^{-1} \cdot D + (I - E)^{-1} \cdot F \cdot \bar{x}^{(k)}$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{g} + C \cdot \bar{x}^{(k)} = C \cdot \bar{x}^{(k)} + \bar{g}$$

Com:

$$C = (I - E)^{-1} \cdot F$$

$$\bar{g} = (I - E)^{-1} \cdot D$$

I = Matriz Identidade

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Método de Gauss-Seidel (MGS):**

Exemplo: Resolver o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Seidel com $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e erro relativo $\varepsilon = 0{,}05$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left[5 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right] = 1 - 0{,}2x_2^{(k)} - 0{,}2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[6 - 3x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right] = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(k+1)} - 0{,}25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left[-3x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)}\right] = -0{,}5x_1^{(k+1)} - 0{,}5x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

andre.Cavalcante@indt.org.br

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Método de Gauss-Seidel (MGS):**

Para $k=0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0{,}2x_2^{(0)} - 0{,}2x_3^{(0)} = 1 - 0{,}2(0) - 0{,}2(0) = 1 \\ x_2^{(1)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(1)} - 0{,}25x_3^{(0)} = 1{,}5 - 0{,}75(1) - 0{,}25(0) = 0{,}75 \\ x_3^{(1)} = -0{,}5x_1^{(1)} - 0{,}5x_2^{(1)} = -0{,}5(1) - 0{,}5(0{,}75) = -0{,}875 \end{cases}$$

$$\text{Máx}\left|x_i^{(1)}\right| = 1$$

Erro ($k=0$):

$$\left.\begin{array}{l} \left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |1-0| = 1 \\ \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |0{,}75-0| = 0{,}75 \\ \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |-0{,}875-0| = 0{,}875 \end{array}\right\}$$

$$M^1 = \text{Máx}\left|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}\right| = 1$$

$$M_R^1 = \frac{M^1}{\text{Máx}\left|x_i^{(1)}\right|} = \frac{1}{1} = 1 > \varepsilon = 0{,}05$$

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Método de Gauss-Seidel (MGS):**

Para $k = 1$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0{,}2x_2^{(1)} - 0{,}2x_3^{(1)} = 1 - 0{,}2(0{,}75) - 0{,}2(-0{,}875) = 1{,}025 \\ x_2^{(2)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(2)} - 0{,}25x_3^{(1)} = 1{,}5 - 0{,}75(1{,}025) - 0{,}25(-0{,}875) = 0{,}95 \\ x_3^{(2)} = -0{,}5x_1^{(2)} - 0{,}5x_2^{(2)} = -0{,}5(1{,}025) - 0{,}5(0{,}95) = -0{,}9875 \end{cases}$$

$$\text{Máx}\left|x_i^{(2)}\right| = 1{,}025$$

Erro ($k = 1$):

$$\left.\begin{aligned} \left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| &= |1{,}025 - 1| = 0{,}025 \\ \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| &= |0{,}95 - 0{,}75| = 0{,}2 \\ \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| &= |-0{,}9875 + 0{,}875| = 0{,}1125 \end{aligned}\right\}$$

$$M^2 = \text{Máx}\left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| = 0{,}2$$

$$M_R^2 = \frac{M^2}{\text{Máx}\left|x_i^{(2)}\right|} = \frac{0{,}2}{1{,}025} = 0{,}1951 > \varepsilon = 0{,}05$$

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Método de Gauss-Seidel (MGS):**

Para k =2

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1 - 0{,}2x_2^{(2)} - 0{,}2x_3^{(2)} = 1 - 0{,}2(0{,}95) - 0{,}2(-0{,}9875) = 1{,}0075 \\ x_2^{(3)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(3)} - 0{,}25x_3^{(2)} = 1{,}5 - 0{,}75(1{,}0075) - 0{,}25(-0{,}9875) = 0{,}99125 \\ x_3^{(3)} = -0{,}5x_1^{(3)} - 0{,}5x_2^{(3)} = -0{,}5(1{,}0075) - 0{,}5(0{,}99125) = -0{,}999375 \end{cases}$$

$$\text{Máx}\left|x_i^{(3)}\right| = 1{,}0075$$

Erro (k =2):

$$\left.\begin{aligned} \left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| &= |1{,}0075 - 1{,}025| = 0{,}0175 \\ \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| &= |0{,}99125 - 0{,}95| = 0{,}04125 \\ \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| &= |-0{,}999375 + 0{,}9875| = 0{,}011875 \end{aligned}\right\}$$

$$M^3 = \text{Máx}\left|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}\right| = 0{,}04125$$

$$M_R^3 = \frac{M^3}{\text{Máx}\left|x_i^{(3)}\right|} = \frac{0{,}04125}{1{,}0075} = 0{,}04094 < \varepsilon = 0{,}05$$

Condição de parada

Então: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1{,}0075 & 0{,}99125 & -0{,}999375 \end{bmatrix}^T$

andre.Cavalcante@indt.org.br

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Interpretação Geométrica do MGS:**

Exemplo: Resolver o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Seidel com $\bar{x}^{(0)} = [0 \quad 0]^T$.

$$\begin{cases} x_1 + 1x_2 = +3 & (\text{Equação } 1) \\ x_1 - 3x_2 = -3 & (\text{Equação } 2) \end{cases}$$

De onde se tira que:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1 + \dfrac{1}{3} x_1^{(k+1)} \end{cases}$$

Métodos Iterativos

S. LINEARES

- **Interpretação Geométrica do MGS:**

Para $k = 0$

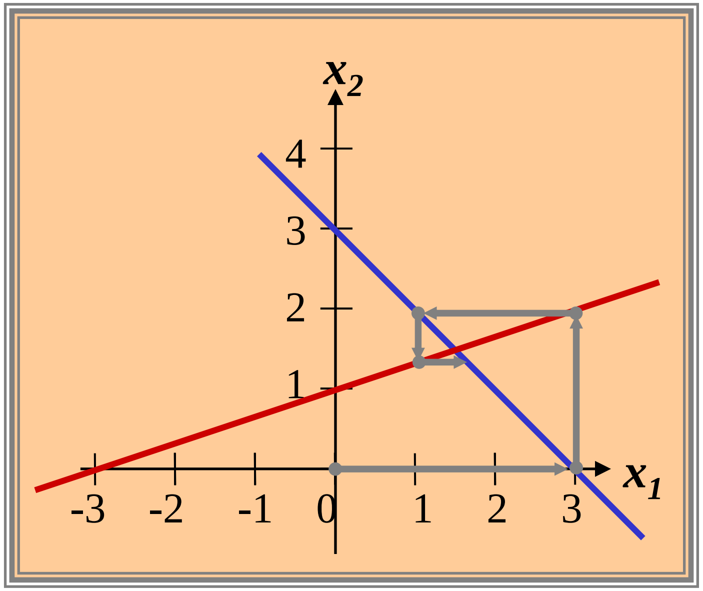
$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3 - x_2^{(0)} = 3 - 0 = 3 \\ x_2^{(1)} = 1 + \frac{1}{3} x_1^{(1)} = 1 + \frac{1}{3}(3) = 2 \end{cases}$$

Para $k = 1$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3 - x_2^{(1)} = 3 - 2 = 1 \\ x_2^{(2)} = 1 + \frac{1}{3} x_1^{(2)} = 1 + \frac{1}{3}(1) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Para $k = 2$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 3 - x_2^{(2)} = 3 - \frac{4}{3} = 5/3 \\ x_2^{(3)} = 1 + \frac{1}{3} x_1^{(3)} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{14}{9} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 + 1x_2 = +3 & \text{(Equação 1)} \\ x_1 - 3x_2 = -3 & \text{(Equação 2)} \end{cases}$$

Iterações

andre.Cavalcante@indt.org.br

Métodos Iterativos

S. LINEARES

- **Critério de Convergência:**

Teorema (Critério das Linhas): É a condição <u>suficiente</u> para que a iteração definida por $\bar{x} = C \cdot \bar{x} + \bar{g}$ convirja.

Seja o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

$$\alpha_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \qquad 1 \leq i \leq n$$

Condição suficiente para o processo convergir:

$$\alpha = \text{Máx}(\alpha_i) < 1 \qquad 1 \leq i \leq n$$

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Critério de Convergência:**

Exemplo 1 (critério das linhas):

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Para $i = 1$ (linha 1)

$$\alpha_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{3} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|} = \sum_{j=2}^{3} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|} = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{2+1}{10} = 0{,}3$$

Para o cálculo de α_i, soma-se os módulos dos elementos que estão fora da diagonal principal e divide-se pelo módulo do elemento que está na diagonal principal da referida linha *i*

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Critério de Convergência:**

Exemplo 2 (critério das linhas):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = +3 \\ x_1 + 3x_2 = -3 \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Linha 1 (i =1): $\alpha_1 = \frac{|a_{12}|}{|a_{11}|} = \frac{|1|}{|1|} = 1$

Linha 2 (i =2): $\alpha_2 = \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|} = \frac{|1|}{|-3|} = \frac{1}{3}$

Condição de suficiência: $\alpha = \text{Máx}(\alpha_i) = 1$

Não é garantida a convergência

Obs: Esse sistema tem solução, mas pelo método de Jacobi não é garantida a convergência.

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Critério de Convergência:**

Exemplo 3 (critério das linhas):

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = +3 \\ \quad\quad 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Linha 1 (i =1): $\alpha_1 = \dfrac{|3| + |1|}{|1|} = 4$

Linha 2 (i =2): $\alpha_2 = \dfrac{|5| + |2|}{|3|} = 3{,}5$

Linha 3 (i =3): $\alpha_3 = \dfrac{|0| + |6|}{|8|} = 0{,}75$

Condição de suficiência

$\alpha = 4 \geq 1$

Não é garantida a convergência

andre.Cavalcante@indt.org.br

S. LINEARES

Métodos Iterativos

- **Critério de Convergência:**

Trocando a linha 2 pela linha 1 tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Linha 1 (i =1): $\alpha_1 = \dfrac{|2| + |2|}{|5|} = 0{,}8$

Linha 2 (i =2): $\alpha_2 = \dfrac{|1| + |1|}{|3|} = \dfrac{2}{3}$

Linha 3 (i =3): $\alpha_3 = \dfrac{|6| + |0|}{|8|} = 0{,}75$

Condição de suficiência

$$\alpha = 0{,}8 < 1$$

Convergência garantida

Obs: A dominância da diagonal principal garante a convergência do sistema.