ZEROS

Capítulo II
Zeros de Funções

Dr. André Mendes Cavalcante

Novembro de 2014

ZEROS

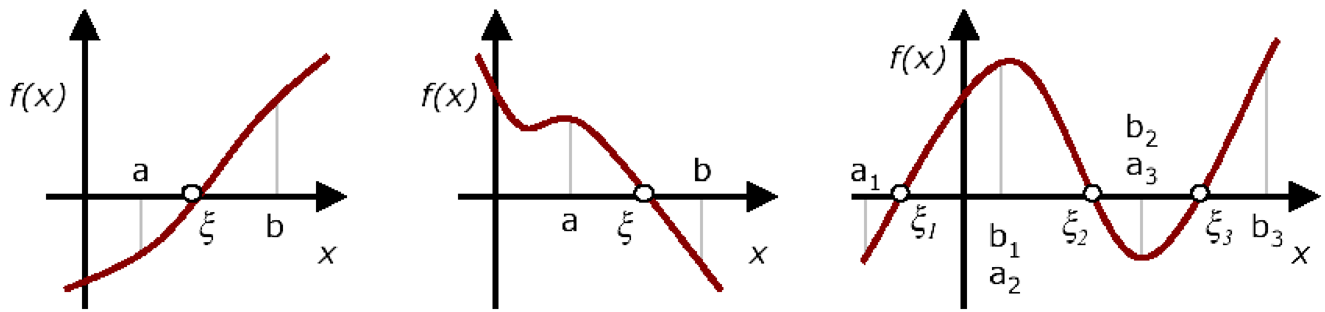
TÓPICOS

- Introdução
- Método Gráfico
- Método da Dicotomia (Método da Bisseção)
- Método de Newton-Raphson (Método das Tangentes)

Introdução

ZEROS

- **Em muitos problemas de Ciência e Engenharia há necessidade de se determinar um ξ_k para o qual uma função f(x) seja zero, ou seja, $f(\xi_k) = 0$. Este número é chamado raiz da equação f(x) = 0 ou zero da função f(x).**



ZEROS

Introdução

- **Etapas para o cálculo das raízes:**

I. **Isolar a raiz, ou seja, achar um intervalo [a,b], o menor possível, que contenha uma e somente uma raiz da equação $f(x) = 0$.**

Analítico

Gráfico

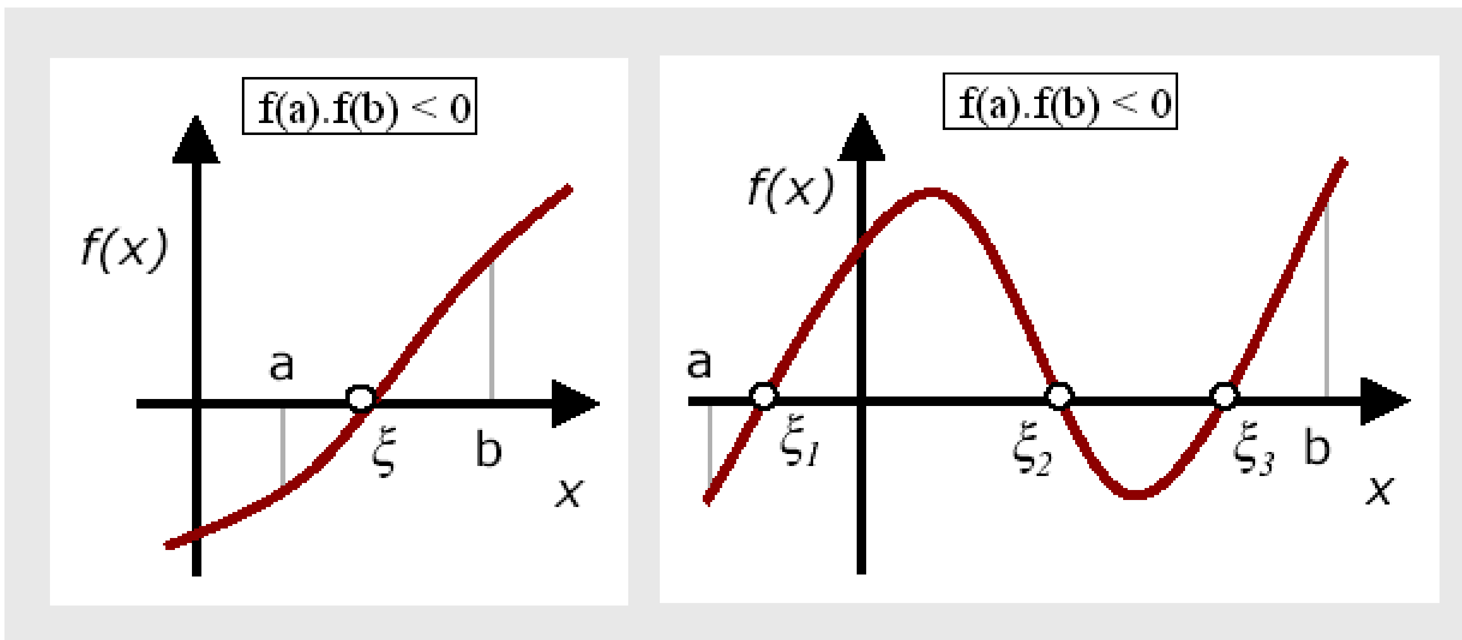
II. **Refinamento: Melhorar o valor da raiz aproximada, isto é, refiná-la até o grau de exatidão requerido (erro)**

Introdução

ZEROS

I. Isolamento de Raízes:

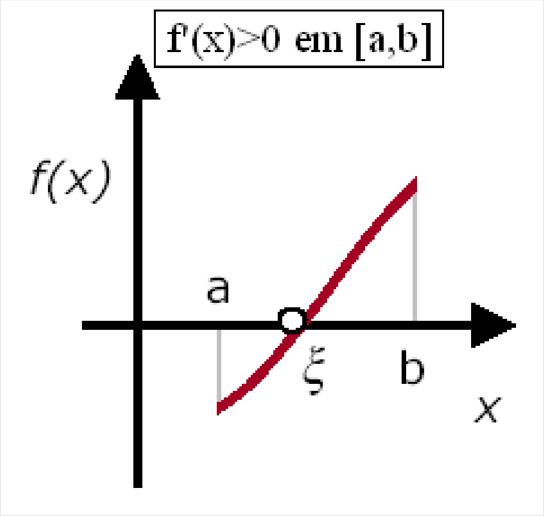
<u>Teorema</u>: seja f(x) uma função contínua num intervalo [a, b], se $f(a).f(b) < 0$, existe pelo menos uma raiz no intervalo considerado.

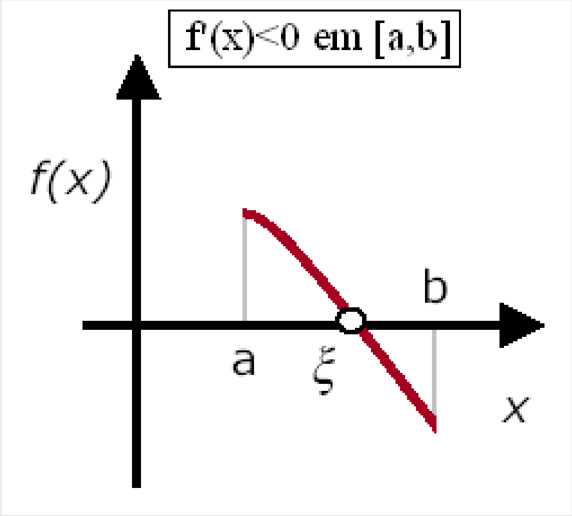


Introdução

ZEROS

- **A raiz será definida e única se a derivada f'(x) existir e preservar o sinal dentro do intervalo [a,b], isto é, se f'(x)>0 ou f'(x)<0 para a < x < b.**





Isolamento de Raízes

ZEROS

- **Exemplo:**

Isolar analiticamente a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$

Solução

Tem-se que $\boxed{f^{'}(x) = 3x^2 - 9}$

x	$f(x)$	*sinal*
-5	-77	-
-3	3	+
-1	11	+
0	3	+
1	-5	-
2	-7	-
3	3	+

Existe raiz única ($f'(x) > 0$ neste intervalo)

Existe raiz única ($f'(x) < 0$ neste intervalo)

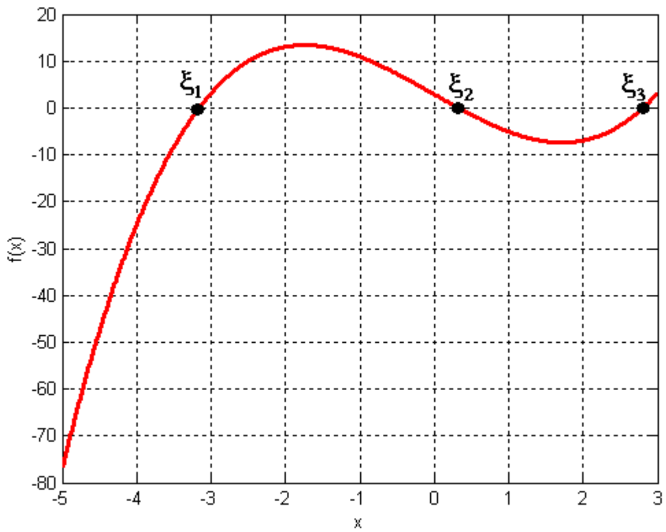
Existe raiz única ($f'(x) > 0$ neste intervalo)

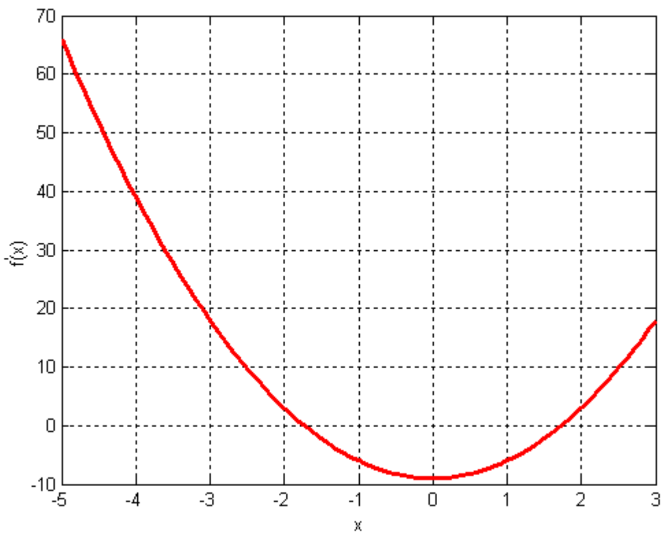
Isolamento de Raízes

ZEROS

- **Exemplo (continuação):**

Gráfico $f(x)$	Gráfico $f'(x)$





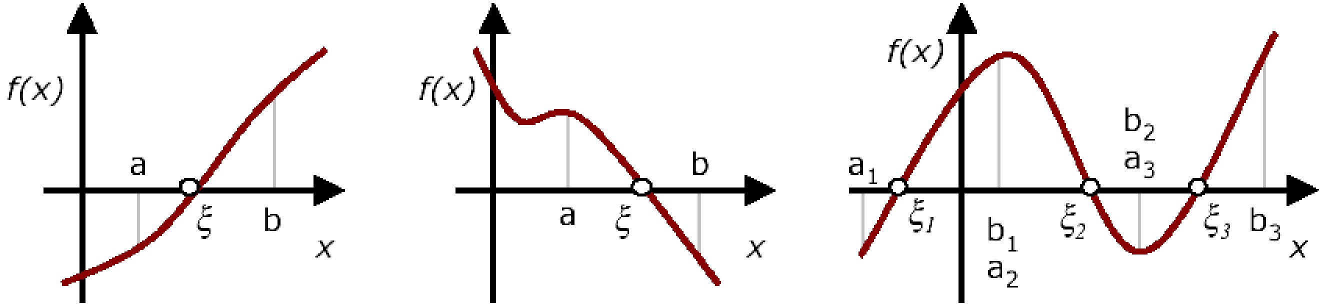
Isolamento de Raízes

ZEROS

- **Método Gráfico**

  Uma raiz real de uma equação f(x) = 0 é um ponto onde a função toca o eixo das abscissas (eixo dos x)

Modo 1: Esboçar a função *f*(*x*) e verificar em que ponto a função se anula.



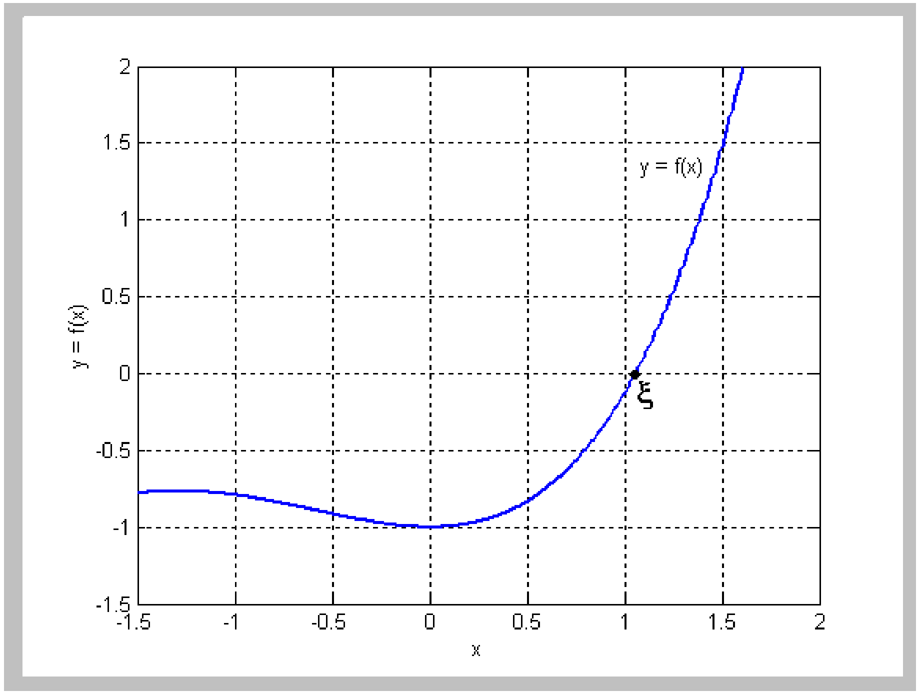
Isolamento de Raízes

ZEROS

- **Exemplo (Método Gráfico – Modo 1):**

Achar graficamente o zero (ξ) da função $f(x) = e^x - \text{sen}\,x - 2$

Solução



Graficamente tem-se que:

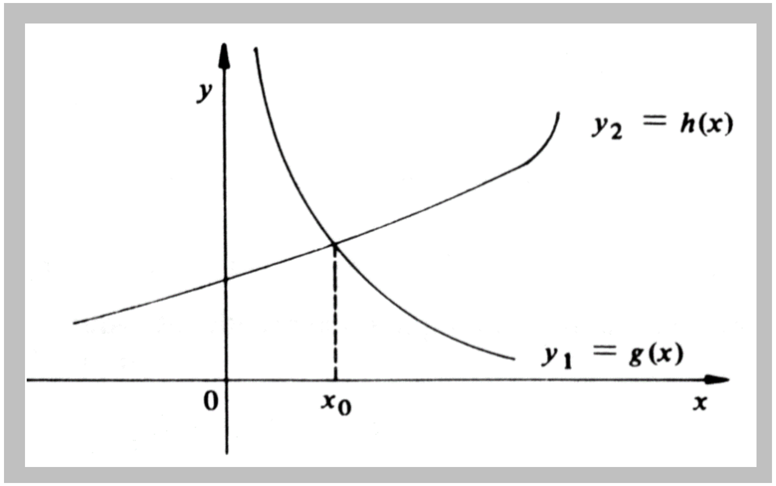
$\xi \cong 1{,}1$

Isolamento de Raízes

ZEROS

- **Método Gráfico**

Modo 2: Substituir $f(x) = 0$ por $g(x) - h(x) = 0$ equivalente, ou seja, uma equação que tenha as mesmas raízes de $f(x) = 0$. Fazer os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$. O ponto onde os gráficos se interceptam (abscissa $x = x_0$) será a raiz de $f(x)$, pois $g(x_0) = h(x_0) \Rightarrow f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) = 0$.



OBS: O Método Gráfico deve ser usado apenas como uma aproximação inicial da raiz exata

Isolamento de Raízes

ZEROS

- **Exemplo (Método Gráfico – Modo 2):**

Achar graficamente o zero (ξ) da função $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 2$

Solução

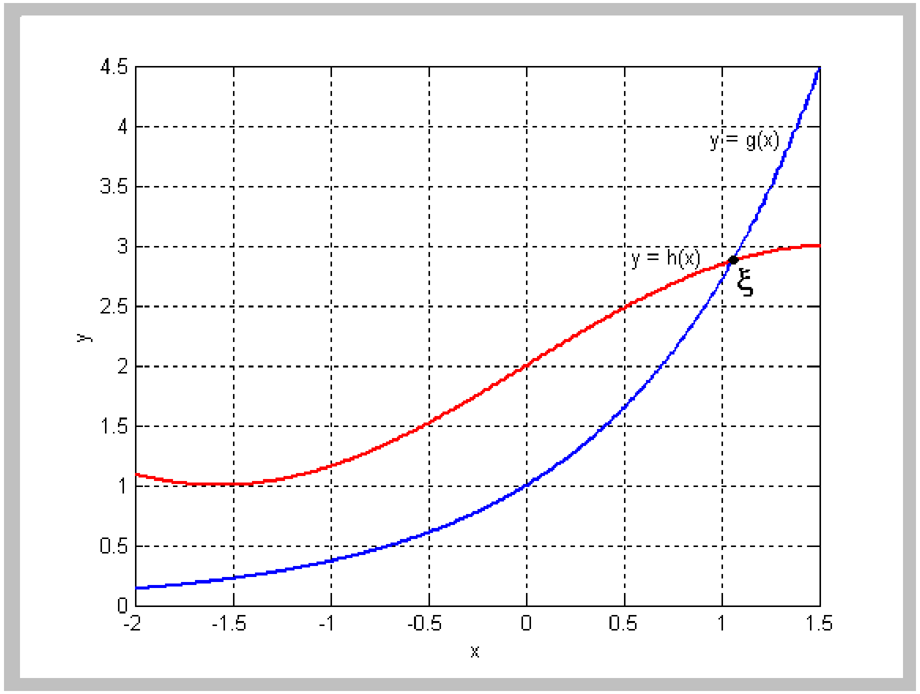
Separando $f(x)$ em duas funções:

$$g(x) = e^x$$

$$h(x) = \operatorname{sen} x + 2$$

Graficamente tem-se que:

$$\xi \cong 1{,}1$$



ZEROS

Refinamento

- **Critérios de Parada:**

1. $\boxed{\left|f(x_k)\right| \le \varepsilon}$

2. $\boxed{\left|x_k - \xi\right| \le \varepsilon}$

ε = tolerância prefixada

x_k = raiz aproximada da Eq. $f(x) = 0$

ξ = raiz exata da Eq. $f(x) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$

Como não se conhece *a priori* ξ para a aplicação de 2, usa-se outros procedimentos (critérios práticos) a seguir:

2.1 $\boxed{\left|x_k - x_{k-1}\right| \le \varepsilon}$ (teste de erro absoluto)

2.2 $\boxed{\dfrac{\left|x_k - x_{k-1}\right|}{\left|x_k\right|} \le \varepsilon}$ (teste de erro relativo)

Onde:

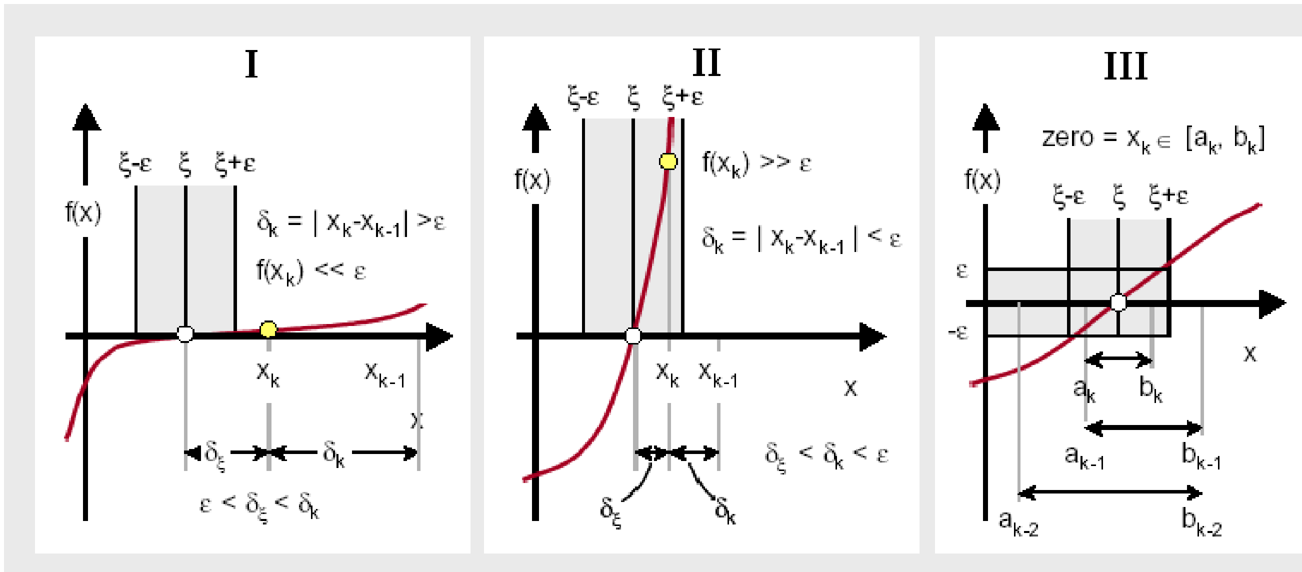
x_k = raiz aproximada na iteração k da Eq. $f(x) = 0$

x_{k-1} = raiz aproximada na iteração $k-1$ da Eq. $f(x) = 0$

Refinamento

ZEROS

- **Escolha do Melhor Critério de Parada:**



Situação	Vizinhança de ξ	Melhor tipo de Teste
I	$f'(x) >> 1$	$\mid f(x_k) \mid < \varepsilon$
II	$f'(x) \cong 0$	$\mid x_k - x_{k-1} \mid < \varepsilon$
II	$f'(x) \cong 0$ (1)	$\mid x_k - x_{k-1} \mid < \varepsilon$ **e** $\mid f(x_k) \mid < \varepsilon$
		$\mid x_k - x_{k-1} \mid < \varepsilon$ **ou** $\mid f(x_k) \mid < \varepsilon$

Método da Dicotomia

ZEROS

- **Descrição**

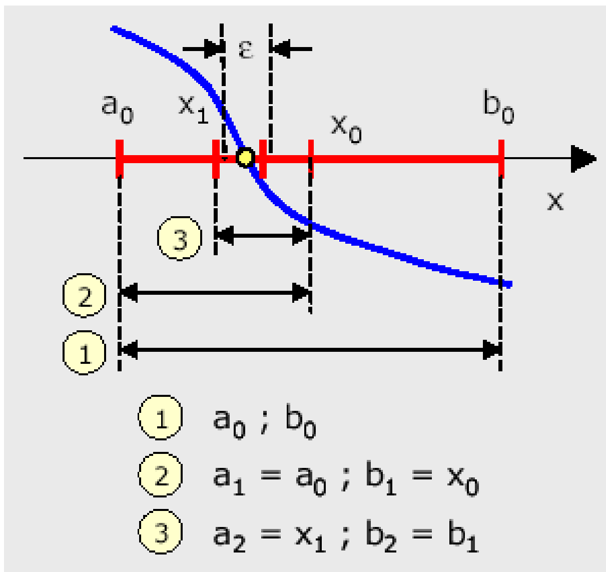
Seja f(x) uma função contínua no intervalo [a,b] e f(a).f(b)<0, divide-se o intervalo [a,b] ao meio e obtém-se x_0, havendo portanto, dois sub-intervalos $[a,x_0]$ e $[x_0,b]$, a ser considerados.

  - **Se $f(x_0)=0$, então x_0 é a raiz, caso contrário, a raiz estará no intervalo $[a,x_0]$ se $f(a).f(x_0)<0$ ou no intervalo $[x_0,b]$ se $f(a).f(x_0)>0$, ou equivalentemente se $f(x_0).f(b)>0$**
  - **O novo intervalo é dividido ao meio e o processo é repetido até que se obtenha uma aproximação para a raiz exata ξ**

Método da Dicotomia

ZEROS

- ## Interpretação Geométrica



$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \rightarrow \left[\begin{array}{l} f(a_0) > 0 \\ f(b_0) < 0 \\ f(x_0) < 0 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \xi \in [a_0, x_0] \\ \therefore \quad a_1 = a_0 \\ \quad\;\; b_1 = x_0 \end{array}\right.$$

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \rightarrow \left[\begin{array}{l} f(a_1) > 0 \\ f(b_1) < 0 \\ f(x_1) > 0 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \xi \in [x_1, b_1] \\ \therefore \quad a_2 = x_1 \\ \quad\;\; b_2 = b_1 \end{array}\right.$$

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \rightarrow \left[\begin{array}{l} f(a_2) > 0 \\ f(b_2) < 0 \\ f(x_2) < 0 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \xi \in [a_1, x_2] \\ \therefore \quad a_2 = a_1 \\ \quad\;\; b_2 = x_2 \end{array}\right.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

O processo é repetido até que algum critério de parada seja atendido

Método da Dicotomia

ZEROS

- **Convergência**

  Esse método converge sempre que a função f(x) for contínua em [a,b], com com f(a).f(b)<0.

- **Número de Iterações**

  É possível demonstrar que usando a condição de parada abaixo o nº de iterações k necessárias para que Método da Bisseção convirja dentro de um erro ε pode ser expresso por:

Condição de Parada

$$b_k - a_k < \varepsilon \Rightarrow \frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Método da Dicotomia

ZEROS

- **Exemplo:**

Determinar o zero da função $f(x) = x^3 - 7$ através do Método da Bisseção no intervalo [1;1,25].

Obs: Solução exata $\xi = 1,912931$

Solução

Verificação se a raiz está no intervalo dado:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -6 < 0 \\ f(2,5) = 8,625 > 0 \end{array}\right\} \boxed{f(1).f(2,5) < 0} \Rightarrow \boxed{\xi \in [1;2,5]}$$

Método da Dicotomia

ZEROS

- **Exemplo (Continuação):**

Iteração $k = 0$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ b_0 &= 2{,}5 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 1{,}75}$$

$$\boxed{f(x_0) = f(1{,}75) = -1{,}64}$$

Verificação do novo intervalo onde se encontra a raiz:

$$\boxed{\begin{aligned} &f(1).f(1{,}75) > 0 \\ &f(1{,}75).f(2{,}5) < 0 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\xi \in [1{,}75; 2{,}5]}$$

Método da Dicotomia

ZEROS

- **Exemplo (Continuação):**

Iteração $k = 1$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1{,}75 \\ b_1 &= 2{,}5 \end{aligned}\right\} \boxed{x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 2{,}125}$$

$$\boxed{f(x_1) = f(2{,}125) = 2{,}60}$$

Verificação do novo intervalo onde se encontra a raiz:

$$\boxed{\begin{aligned} f(1{,}750).f(2{,}125) < 0 \\ f(2{,}125).f(2{,}500) > 0 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\xi \in [1{,}750\,;2{,}125]}$$

Método da Dicotomia

ZEROS

- **Exemplo (Continuação):**

Iteração $k = 2$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= 1{,}750 \\ b_2 &= 2{,}125 \end{aligned}\right\} \boxed{x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 1{,}938}$$

$$\boxed{f(x_2) = f(1{,}938) = 0{,}27}$$

$$\vdots$$

Continua o processo até que algum critério de parada seja atendido

Método da Dicotomia

- **Exemplo (Continuação):**

Considerando um erro de $\varepsilon = 0{,}01$, o nº de iterações k necessárias para atender o critério de parada $|\, b_k - a_k \,| < \varepsilon$ seria:

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

$$k > \frac{\log(2{,}5 - 1) - \log(0{,}01)}{\log(2)} = 7{,}2288$$

Como o nº de iterações k deve ser inteiro, logo:

$$k > 8 \ \text{iterações}$$

ZEROS

Método de Newton-Raphson

- **Descrição**

Seja f(x) uma função contínua no intervalo [a,b], e ξ seu único zero neste intervalo; as derivadas f'(x) ($f'(x) \neq 0$) e f''(x) devem ser contínuas. Encontra-se uma aproximação x_k para a raiz ξ e é feita uma expansão em série de Taylor para f(x) = 0

Método de Newton-Raphson

ZEROS

- ## Formulação

Expansão de $f(x) = 0$ em série de Taylor na vizinhança do ponto x_0:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta x . f^{'}(x_0) + \frac{(\Delta x)^2 . f^{''}(x_0)}{2!} + \frac{(\Delta x)^3 . f^{'''}(x_0)}{3!} + \cdots = 0$$

com: $\Delta x = x_1 - x_0$

Para linearizar esta expansão, elimina-se os termos de ordem superior, resultando em:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta x . f^{'}(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) . f^{'}(x_0) = 0$$

Resultando em:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{'}(x_0)}$$

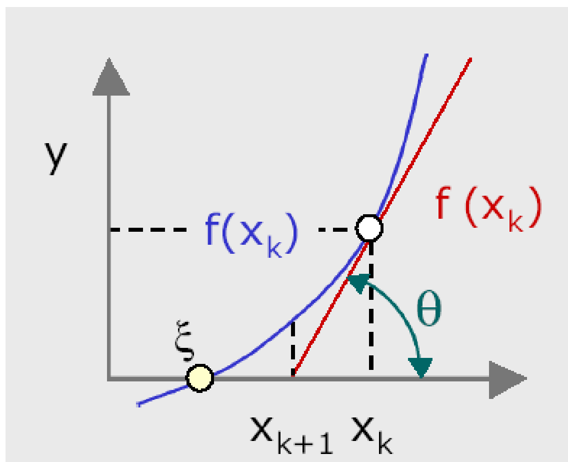
Generalizando

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)}$$

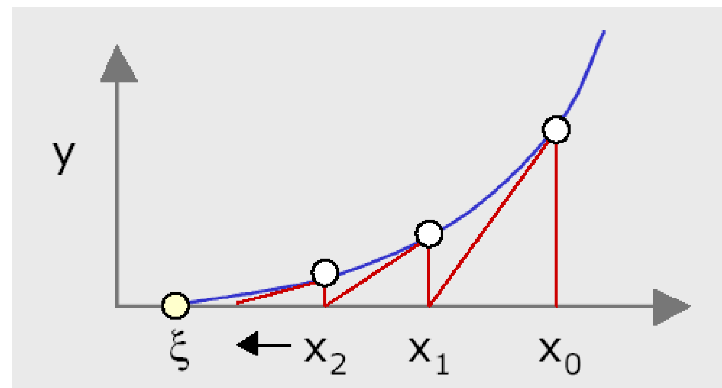
ZEROS

Método de Newton-Raphson

- **Interpretação Geométrica**



$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f\,(x_k)$$



Aproximações sucessivas fazem x_k, k=0,1,2,..., tender ao valor do zero (ξ).

andre.Cavalcante@indt.org.br

ZEROS

Método de Newton-Raphson

- **Convergência**

É condição suficiente para a convergência do Método de Newton-Raphson que: f'(x) e f''(x) sejam não nulas e preservem o sinal em (a,b) e x_0 (estimativa inicial) seja tal que $f(x_0).f''(x_0)>0$

- **Número de Iterações**

Por ter convergência quadrática, o nº de iterações necessárias no Método de Newton-Raphson tende a ser menor que todos os outros métodos apresentados neste capítulo.

Método de Newton-Raphson

ZEROS

- **Exemplo 1:**

Determinar a função de iteração do método de Newton-Raphson tende a ser para a equação $f(x) = x^3 - 7 = 0$

Solução

Derivada de $f(x)$: $f'(x) = 3x^2$

Equação de iteração de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 7}{3x_k^2}$$

Método de Newton-Raphson

ZEROS

- **Exemplo 2:**

Determinar o zero da função $f(x) = x^2 - 2$ através do Método de Newton-Raphson considerando como estimativa inicial $x_0 = 1$ e três iterações ($k = 0,1,2$)

Obs: Solução exata $\xi = 1,41421356$

Solução

Derivada de $f(x)$: $\boxed{f'(x) = 2x}$

Equação de iteração de Newton:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \rightarrow \boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}}$$

ZEROS

Método de Newton-Raphson

- **Exemplo 2 (continuação):**

Iteração $k = 0$

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 1 - \frac{(1)^2 - 2}{2(1)}} \Rightarrow \boxed{x_1 = 1{,}5}$$

Iteração $k = 1$

$$\boxed{x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 1{,}5 - \frac{(1{,}5)^2 - 2}{2(1{,}5)}} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1{,}41666667}$$

Iteração $k = 2$

$$\boxed{x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 2}{2x_2} = 1{,}41666667 - \frac{(1{,}41666667)^2 - 2}{2(1{,}41666667)}} \Rightarrow \boxed{x_3 = 1{,}41664267}$$